

THERMODYNAMIQUE

PHYS-106 (b)

1. INTRODUCTION

Structure du cours

1. Introduction à la thermodynamique
2. Théorie cinétique des gaz
3. Gaz parfaits, gaz réels et gaz de Van der Waals
4. Transitions de phase
5. Le premier principe
6. Le second principe
7. Cycles et machines thermiques
8. Diffusion, transfert de chaleur
9. Systèmes ouverts, potentiel chimique
10. Introduction à la relativité restreinte

Structure chapitre 1

1. Introduction à la thermodynamique

1.1. Bref historique

1.2. Définition thermodynamique et exemples

1.3. Approche statistique

1.4. Définitions et conventions

1.5. Pression

1.6. Température

1.7. Compléments mathématiques

1.1. Bref historique (non exhaustif)

Thermodynamique

chaleur

"dunamus" (puissance)

Origines : Philosophes Grecs (Héraclite, Démocrite)

Spéculations sur la nature de la matière et de l'énergie.

Démocrite : "la chaleur pourrait être liée

au mouvement des atomes"



Théories, études

Philosophes grecs ~ -400

Héraclite

Démocrite

→ D ~ 0

Galilée, Boyle

~ 1700

Lavoisier

- premières études expérimentales sur les gaz et la pression
- lien entre pression et volume
- concept de calorique chaleur latente

→ 1700

Inventions

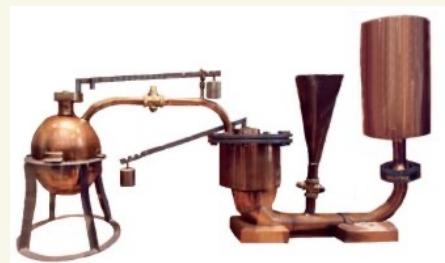
Héron d'Alexandrie

Eolipyle : machine à vapeur et à réaction



→ 1690 Denis Papin

- marmite à vapeur
- machine à vapeur constituée d'un cylindre et d'un piston



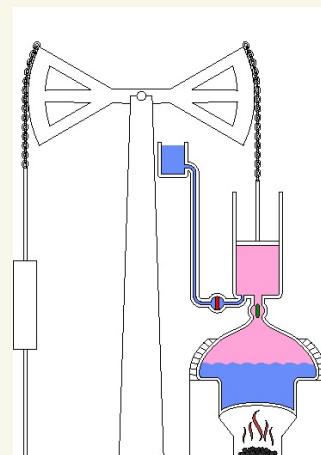
Théories, études

→ 1712

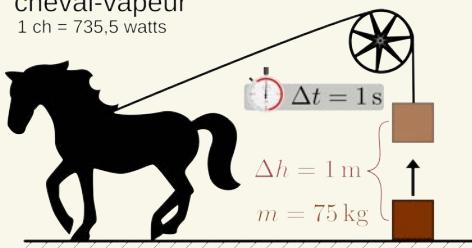
Inventions

Thomas Newcomen

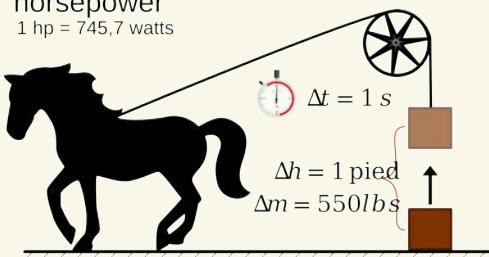
- première machine à vapeur industrielle



cheval-vapeur
1 ch = 735,5 watts



horsepower
1 hp = 745,7 watts



→ 1765

James Watt

- améliore grandement la machine de Newcomen (condenseur séparé)

- concept de cheval-vapeur

→ 1769-1771 Nicolas Joseph Cugnot

-premier véhicule automobile



→ 1802 Richard Trevithick

-première machine à vapeur à haute pression
- première locomotive à vapeur



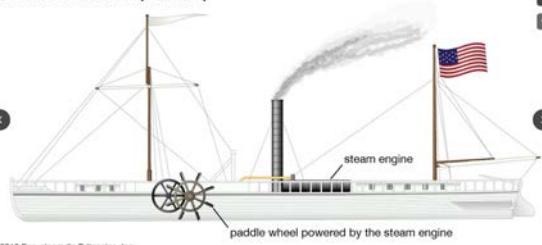
Théories, études

Inventions

→ 1807 Robert Fulton

-premier navire
à vapeur

North River Steamboat (Clermont)



Sadi Carnot 1824

-Cycles thermodynamiques,
- efficacité des machines
thermiques

James Prescott Joule 1843

- la chaleur est une
forme d'énergie

Julius Robert von Mayer 1850

-énonce le premier principe

Rudolf Clausius 1850

-concept d'entropie
- deuxième principe

Théories, études

Lord Kelvin

(1824 - 1907)

- échelle absolue de température
- contribue aux lois fondamentales de la thermodynamique

Ludwig Boltzmann

(1844 - 1906)

- relie la thermodynamique à la mécanique statistique

application à des systèmes complexes
(chimie, biologie)

Inventions

4

4

20^{ème} siècle

Théories, études

Inventions

Ilya Prigogine 1970 ↪

- systèmes complexes
- structures dissipatives
- irréversibilité

Aujourd'hui ↪

Applications modernes :

- énergies renouvelables
- physique des plasmas
- nanotechnologie
- astrophysique
- cosmologie

⋮

1.2. Définitions et exemples

La thermodynamique étudie les relations entre la **chaleur**, **l'énergie** et le **travail**, ainsi que les **transformations d'énergie** d'une forme à l'autre.

Exemples de phénomènes/objets où la thermodynamique intervient

- Maison :
 - thermomètre
 - pile électrique
 - réfrigérateur, congélateur
 - plaques de cuisson

- chauffe eau, cocotte minute
 - chauffage, pompe à chaleur
 - climatisation
- Transport :
 - moteur thermique
 - turbo réacteur
 - moteur fusée
- Phénomènes atmosphériques :
 - nuage, pluie
 - vent, cyclones
- Astrophysique :
 - étoile
 - trou noir
- Phénomènes biologiques :
 - métabolisme cellulaire
 - bioénergétique musculaire
 - transpiration
- Réactions chimiques

- Production d'électricité : centrale : - à charbon
 - biomasse
 - nucléaire (fusion, fission)
 - géothermique
 - solaire
- thermodynamique

Buts de la thermodynamique :

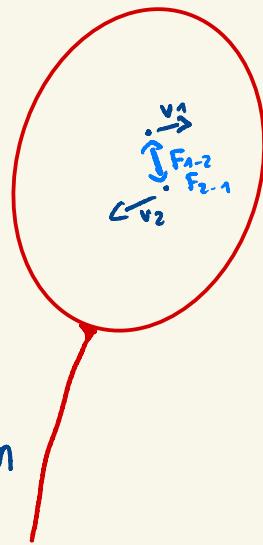
- Décrire de manière **macroscopique** des objets ou **systèmes** extrêmement **complexes**
- Etudier **les transformations d'énergies** entre différentes formes (comment, conditions ...)
- Etablir **des principes universels**
- Expliquer les processus naturels (irréversibilité de certaines transformations)
- Optimiser **l'efficacité énergétique**
• • •

1.3. Approche fondamentale (microscopique)

VS approche phénoménologique

Prenons l'exemple d'un ballon rempli d'Helium

Ce système est composé d'un certains nombres d'atomes d'Helium. Comme en mécanique, en connaissant la position, la vitesse et les forces agissant sur chacun des atomes, on peut décrire la trajectoire de chacun de ces atomes et donc l'évolution du système.

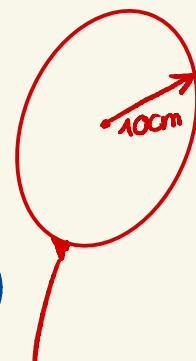


Problème: Un objet réel est constitué d'un grand nombre d'atomes / molécules :

Combien?

Considérons un ballon sphérique de rayon $R \approx 10\text{cm}$

$$\Rightarrow V_{\text{ballon}} \approx 0.004 \text{ m}^3 \quad (\approx 4 \text{ litres})$$



On est à température ambiante ($T = 25^\circ\text{C}$ ou 298K) et à pression "normale" ou "atmosphérique" ($P = 1 \text{ atm}$ ou $\approx 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$)

On utilise la loi des gaz parfaits :

$$pV = nRT$$

moles $8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$

$$\text{On a donc : } n = \frac{pV}{RT}$$

$$\text{Application numérique : } n = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 3 \cdot 10^2} \approx \frac{1}{6}$$

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{\text{atomes}}{\text{mole}}$

$$\Rightarrow \text{Nombre d'atomes : } N = n \cdot N_A$$

$$N \approx 1 \cdot 10^{23} \text{ atomes}$$

Il faudrait donc $\sim 10^{23}$ équations du mouvement pour décrire le système.

Le superordinateur du CSCS (Centre National Suisse du Calcul Scientifique) aura une performance de calcul $\sim \frac{10^{18} \text{ opérations}}{1 \text{ s}}$

Si chaque équation nécessite une opération (grosse simplification), il faudrait $10^{23} \cdot \frac{1}{10^{18}} = 10^5$ secondes pour résoudre un seul "instant" de la simulation (~ 28 heures).

En pratique, les équations sont couplées et le nombre d'opérations à résoudre

est bien plus élevé : la complexité est $N^2 \Rightarrow (10^{23})^2 = 10^{46}$ opérations par pas de temps

Admettons qu'on simule 10 pas de temps
 $\Rightarrow 10^{47}$ opérations

Temps nécessaire à la simulation :

$$10^{47} \cdot \frac{1}{10^{18}} = 10^{29} \text{ secondes}$$

Cela équivaut à $3 \cdot 10^{21}$ années, bien plus élevé que l'âge de l'univers ($13.8 \cdot 10^9$ années)

Cet exemple (extrêmement simplifié) montre qu'en pratique, il est impossible et pas intéressant d'utiliser cette approche.

Solution: Utiliser une approche **statistique**

La description des systèmes sera basée sur des grandeurs **macroscopiques**, qui sont calculées comme **moyenne** sur l'ensemble des particules.

On appelle ces variables des **variables d'état**.

Exemple du ballon :

- p et V caractérisent l'état mécanique du système
- T est nécessaire pour déterminer l'état physique du système .



1.4. Définitions et conventions

Un système : partie de l'univers que l'on considère

Macroscopique : à l'échelle de nos sens

Variable d'état : grandeur physique qui décrit l'état d'équilibre d'un système thermodynamique. Elles dépendent uniquement de l'état actuel du système, et non de la manière dont cet état a été atteint (son histoire)

Exemples : p, V, T (plus tard dans le cours: U, S, H)

Équation d'état : équation qui relie les différentes variables d'état à l'équilibre thermodynamique.

Exemple : $pV = nRT$

Fonction d'état : Fonction qui ne dépend que des variables d'état d'un système.

Consequence : sa valeur est indépendante du procédé utilisé pour arriver dans cet état, elle ne dépend que de l'état du système considéré.

Exemple : énergie interne U
enthalpie H
entropie S

Variable extensive : variable proportionnelle à la taille du système

$$\textcircled{x} + \textcircled{x} = \textcircled{2x}$$

Exemple : masse m, nombre de particules, volume V, quantité de mouvement P, énergie interne U, entropie S

Variable intensive : variable indépendante de la taille du système

$$\textcircled{X} + \textcircled{X} = \textcircled{X}$$

Exemple : température T

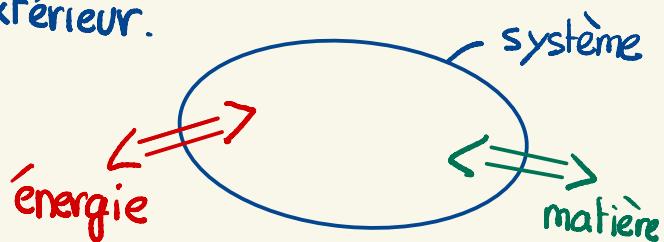
pression p

potentiel chimique χ

densité ρ

Systèmes thermodynamiques

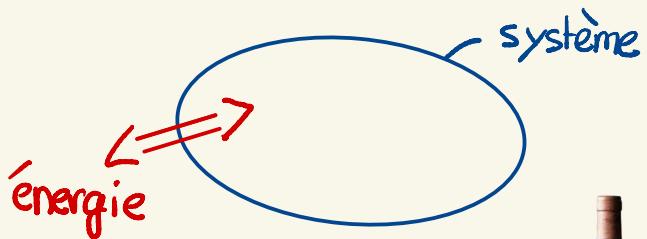
Système ouvert : le système peut échanger de la matière et de l'énergie avec l'extérieur.



Exemple : fusée



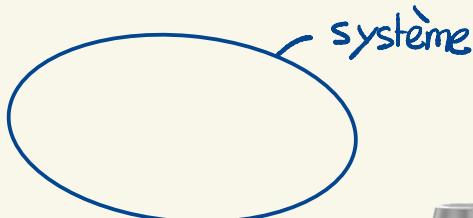
Système fermé : le système n'échange pas de matière avec le milieu extérieur.



Exemple : bouteille fermée



Système isolé : le système n'échange ni énergie, ni matière avec l'extérieur.



Exemple : Thermos



Système stationnaire : système dont les variables d'état ne dépendent pas du temps

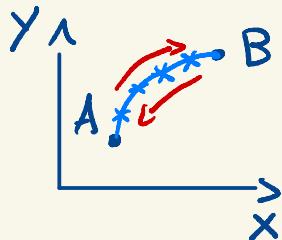
$$\frac{d}{dt}(x) = \dot{x} = 0$$

Système à l'équilibre thermodynamique :

système stationnaire qui, si il est isolé de tout échange avec l'extérieur, reste stationnaire.

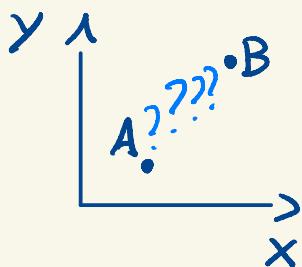
Thermostat : système capable d'échanger de l'énergie sous forme de chaleur avec l'extérieur dans les deux sens (donner et recevoir) sans changer de température.

Transition réversible: transition faite d'une succession d'états d'équilibre thermodynamique.



-peuvent être parcourues dans les deux sens

Transition irréversible: transition telle que les états intermédiaires (entre l'état initial et final) ne sont pas des états à l'équilibre thermodynamique



-On peut aller de A à B et de B à A, mais pas par le même chemin.

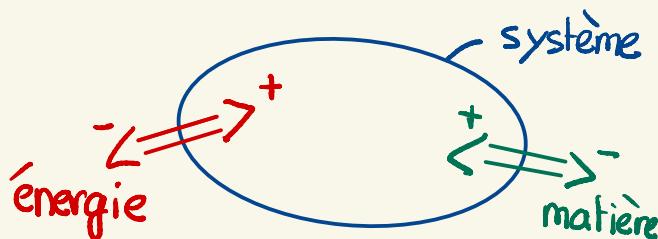
Convention de signe



Il est important de choisir une convention de signe pour les échanges !

Dans ce cours, la convention est de prendre le point de vue du système.

⇒ Si la quantité est gagnée par le système, elle est positive (négative si perdue)



⚠ Dans certains livres, la convention opposée est utilisée.

1.5. La pression

La pression est la mesure de la force, par unité de surface, exercée par un fluide sur une surface élémentaire suivant sa normale (perpendiculairement à la surface).

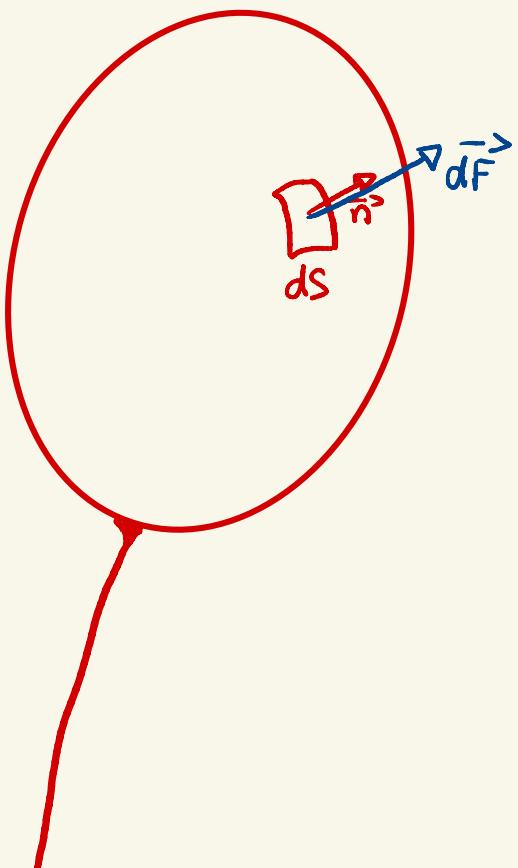
$$p = \frac{F_{\perp}}{s}$$

Comme p n'est pas nécessairement uniforme sur la surface considérée, on la définit localement à l'aide d'une densité surfacique de force normale :

$$p = \frac{dF_{\perp}}{dS}$$

De plus, la surface n'est pas nécessairement plane. On définit la pression à partir de l'élément de surface ds et un vecteur unitaire \vec{n} , perpendiculaire à la surface au point considéré.

$$p = \frac{\vec{dF} \cdot \vec{n}}{ds}$$

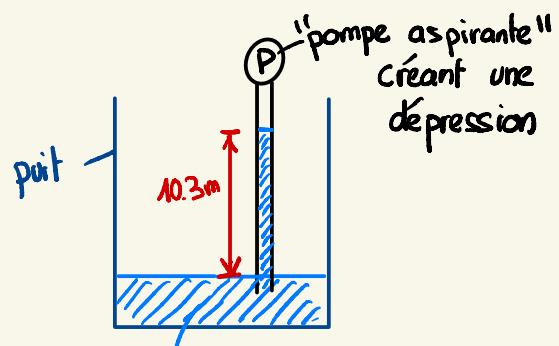


Unité : Pascal [Pa]
ou N/m^2

Expériences historiques

- Aristote : "la nature a horreur du vide"
(~ 350 BC)
=> l'univers est rempli de matière
- XVI^e siècle : Problème des jardins florentins

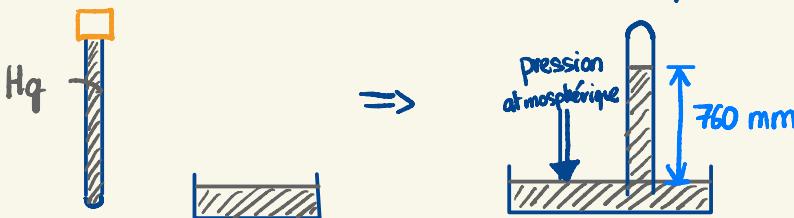
Dispositif astucieux
permettant de pomper
de l'eau pour alimenter
des jardins.



Limitation: les pompes aspirantes ne peuvent pas élever l'eau à plus de 10.3m.

- Expérience de Evangelista Torricelli en 1644

Il remplace l'eau par du mercure (plus dense)



Avec ses expériences, Torricelli fait les hypothèses suivantes :

- l'espace vide au sommet de la colonne de mercure est constituée de **vide**
- la montée du mercure dans le tube est due **au poids de l'atmosphère**

Son expérience est le premier baromètre.

L'unité de pression torr ($1 \text{ torr} = 1 \text{ mmHg}$) porte son nom.

- Expérience du Puy-de-Dôme en 1648 (Petit et Flarin Périier)
Blaise Pascal reprend l'expérience et démontre que c'est bien la pression atmosphérique qui agit sur le liquide en prenant des mesures à différentes altitudes.



L'unité de pression Pascal porte son nom.

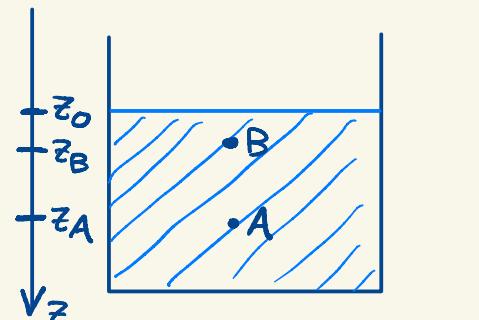
De ces expériences (entre autres), les théories de l'hydrostatique ont été développées.

Principes fondamentaux de l'hydrostatique

Pour un fluide au repos :

- la pression agit également dans toutes les directions (isotropie)
- la pression augmente avec la profondeur, en raison du poids de la colonne de fluide située au-dessus :

$$P = P_0 + \rho g h$$



P₀ : pression au niveau de la surface

ρ : masse volumique du fluide

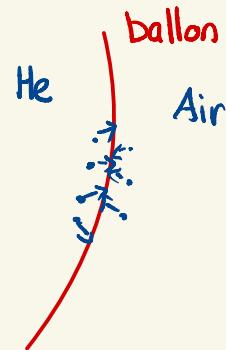
h : profondeur du fluide

$$P(z_A) - P(z_B) = \rho g (z_A - z_B)$$

$$= \rho g \Delta z$$

Point de vue microscopique

La pression est due aux collisions des molécules du fluide contre les parois de l'objet considéré.



À niveau macroscopique, la pression résulte d'un grand nombre de collision avec les molécules.

On y reviendra plus en détail dans le chapitre sur la théorie cinétique des gaz.

1.6. La température

La température est une notion abstraite parfois difficile à appréhender.

Intuitivement, on associe la température à des sensations comme le froid ou le chaud. Ces sensations dépendent de la température, mais pas uniquement, elles peuvent dépendre de l'humidité, de la conductivité thermique, ...

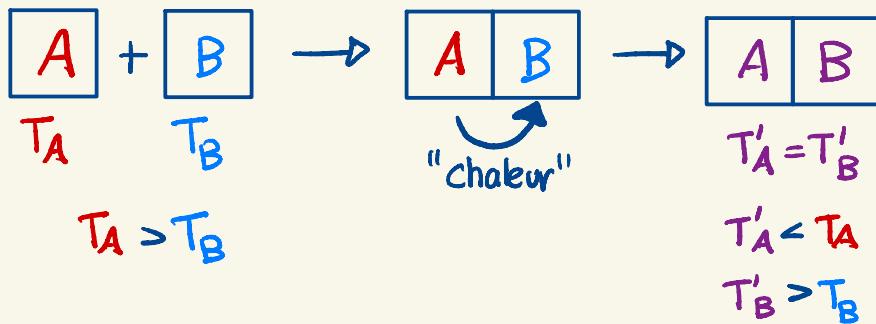
La définition scientifique n'est pas basée sur notre perception mais est liée à l'état microscopique d'un système :

La température est une variable d'état qui mesure le degré d'agitation des molécules/l'atomes qui constituent un corps.

Unités : kelvin [K] unité SI
Celsius [$^{\circ}\text{C}$]
Fahrenheit [$^{\circ}\text{F}$]

Propriété de la température :

Si deux systèmes de température différentes T_A et T_B sont mis en contact, la température des deux systèmes évolue jusqu'à obtenir une température égale. A ce stade les deux systèmes sont à l'équilibre thermique.



Principe zéro de la thermodynamique

Ralph H. Fowler, 1930s

Si deux systèmes A et B sont en équilibre thermique avec un troisième système C, alors A et B sont également en équilibre thermique entre eux.

A et C en équilibre thermique

B et C en équilibre thermique

\Rightarrow A et B également en équilibre thermique

En d'autres termes, chaque corps a une propriété (la température) qui sera égale quand deux corps sont en contact et atteignent l'équilibre thermique.

Importance du principe 0 :

- implique que la température peut être utilisée comme un critère unique pour l'équilibre thermique
- justifie l'utilisation de thermomètre pour mesurer la température.

Dans l'exemple précédent C fonctionne comme thermomètre : on peut dire que A et B sont à la même température sans qu'ils se touchent directement.

Les thermomètres

thermomètre : systèmes de mesure de la température basés sur des effets mesurables que la variation de température produit sur différents milieux.

Exemples de thermomètres :

- Thermomètre à mercure (Fahrenheit, 1717) basé sur la dilatation thermique du mercure

La loi de dilatation thermique (ou expansion thermique) est trouvée expérimentalement :

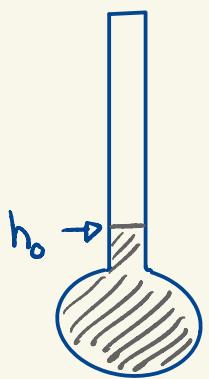
$$V = V_0 + \Delta V = V_0 [1 + \beta_v \Delta T]$$

où

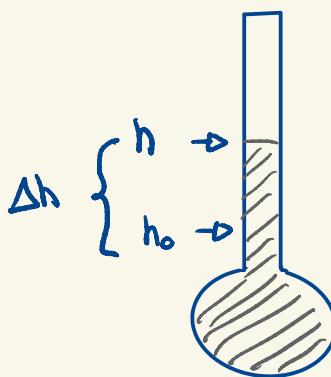
$$\Delta V = \beta_v V_0 \Delta T$$

Avec V_0 le volume initiale, avant le changement de température ΔT et β_v le coefficient d'expansion volumique.

Exemple de dilatation volumique dans le thermomètre à mercure:



T_0



$T_0 + \Delta T$

Considérons le tube en verre de rayon $r = 0.1 \text{ mm}$.

Le volume initiale du mercure est $V_0 = 1 \text{ cm}^3$.

Les coefficients de dilatation volumique du verre et du mercure sont : $\beta_v(\text{verre}) = 9 \cdot 10^{-6} \text{ } \text{g}^{-1}$

$$\beta_v(\text{Hg}) = 180 \cdot 10^{-6} \text{ } \text{g}^{-1}$$

On augmente la température par $\Delta T = 10^\circ \text{C}$.

Quelle est l'augmentation du niveau de Hg Δh ?

Comme β_v (verre) << β_v (Hg) l'expansion du verre est négligeable. L'expansion volumique du mercure est:

$$\Delta V = \beta_v \cdot V_0 \cdot \Delta T$$
$$= 180 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10 = 0.0018 \text{ cm}^3$$
$$[\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}] \quad [\text{cm}^3] \quad [\text{ }^{\circ}\text{C}]$$

Ce changement de volume correspond à une différence de hauteur Δh dans le tube:

$$\Delta V = \pi \cdot r^2 \cdot \Delta h$$
$$\Delta h = \frac{\Delta V}{\pi r^2}$$
$$= \frac{1.8 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2} = 5.7 \text{ cm}$$

- Thermomètre bilame basé sur la dilatation thermique de différents matériaux.

On considère cette fois-ci le coefficient de dilatation linéique (à une dimension) de matériaux.

Pour des matériaux isotropes (invariance des propriétés physiques en fonction de la direction) :

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

avec ΔL : variation de longueur [m]

L_0 : longueur initiale [m]

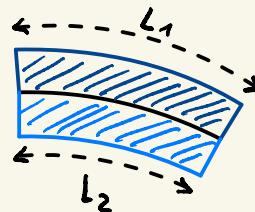
α : coefficient de dilatation linéaire [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]

ΔT : différence de température [$^{\circ}\text{C}$] ou [K]

Bilame : l'idée est d'utiliser deux matériaux qui ont un coefficient de dilatation différent et de les attacher.



T



$T + \Delta T$

$$\text{Pour le métal 1: } L_1 = L_0 + \alpha_1 L_0 \Delta T$$

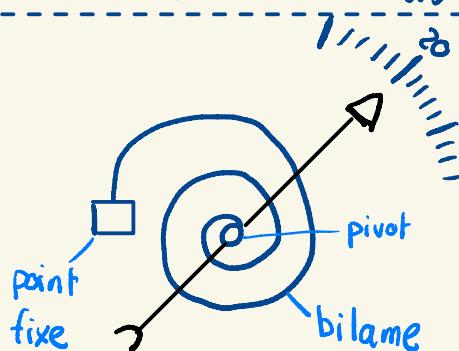
$$= L_0 (1 + \alpha_1 \Delta T)$$

$$\text{Pour le métal 2: } L_2 = L_0 (1 + \alpha_2 \Delta T)$$

$\text{Si } \alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow L_1 \neq L_2 \text{ et on observe une courbure.}$

Pour le cas du dessin: $\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow L_1 > L_2$

Thermomètre à bilame (ou bi-métal):

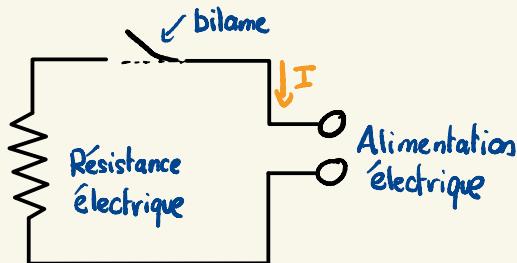


Autre application : "thermostat maison"

Dispositif permettant de maintenir un système entre deux valeurs prescrites.

⚠ ne pas confondre avec le concept de thermostat :
système fermé de température constante

Exemple simplifié :



Le bilame fonctionne comme un switch, avec 2 positions :

- position 1: T_1 , le bilame est courbé et le circuit est ouvert $\Rightarrow I=0$
- position 2: $T_2 < T_1$, le bilame est droit, le circuit est fermé et le courant circule dans la résistance (\Rightarrow effet Joule \Rightarrow chaleur)

- Thermo couple, basé sur un effet thermoélectrique, l'effet Seebeck. Une différence de tension apparaît à la jonction de deux matériaux soumis à une différence de température.

- Thermomètre à résistance de platine, basé sur la variation de la résistance en fonction de la température.

Exemple: Sonde Pt 100

platine 100Ω à 0°C

- Thermomètre infrarouge, basé sur le rayonnement du corps noir des objets.

- ...

Unités pour la température :

- Kelvin :-unité SI

-unité absolue, basée sur le zéro absolu, qui représente l'absence totale d'énergie thermique

- $0K = -273.15^{\circ}C$

- Celsius : - unité basée sur l'échelle centésimale :

⊕ $0^{\circ}C$: point de fusion de la glace
à $p=1\text{ atm}$

⊕ $100^{\circ}C$: point d'ébullition de l'eau
à $p=1\text{ atm}$

- $T(K) = T(^{\circ}C) + 273.15$

- Fahrenheit : - unité basée sur l'échelle suivante :

⊕ $32^{\circ}F$ point de fusion de la glace à $p=1\text{ atm}$

⊕ $212^{\circ}F$ point d'ébullition de l'eau
à $p=1\text{ atm}$

- $T(^{\circ}F) = T(^{\circ}C) \cdot \frac{9}{5} + 32$

1.8. Compléments mathématiques

1.8.1 Dérivées partielles de fonction de plusieurs variables

En thermodynamique l'état du système étudié dépend de plusieurs variables.

Exemple pour un gaz parfait : $pV = nRT$

On a bien une fonction de plusieurs variables :

$$f(p, V, T) = pV - nRT = 0$$

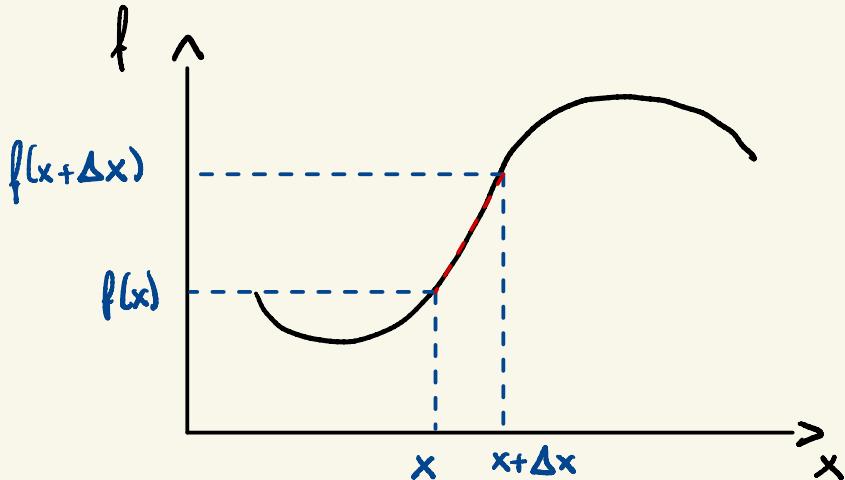
On s'intéresse aux variations de la fonction par rapport à des variations de ses paramètres.

\Rightarrow on a besoin de la dérivée $f'(p, V, T)$

Rappel: pour une fonction dépendant uniquement d'une variable $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{df}{dx}$$

élément infinitésimal



Pour une fonction à plusieurs variables, on a besoin de la notion de dérivée partielle.

Dérivée partielle: la dérivée partielle d'une fonction par rapport à l'une de ses variables s'obtient comme dans le cas d'une fonction à une seule variable, en considérant les autres variables constantes.

- Notation: "d rond"

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

- Exemple pour $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

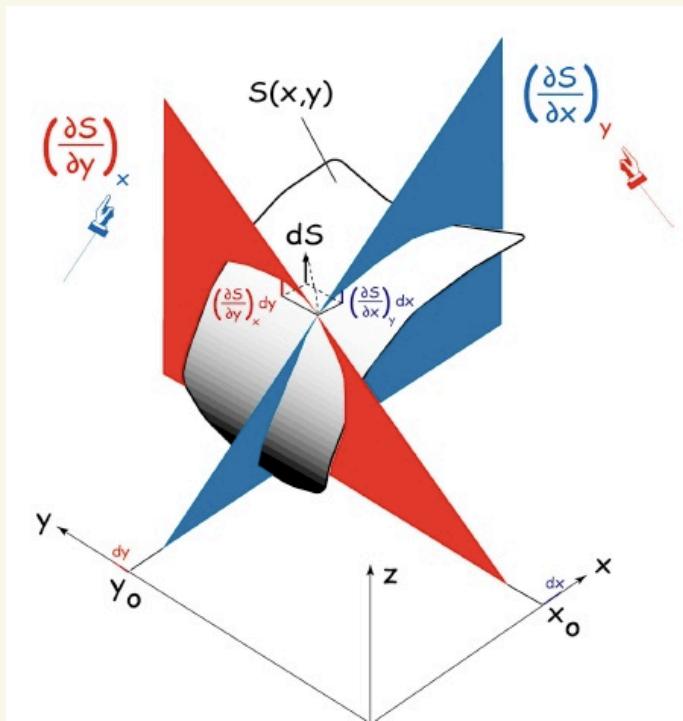
- Représente le taux de variation d'une fonction par rapport à une variable lorsque les autres variables sont fixes.

Exemple: Surface en 3D

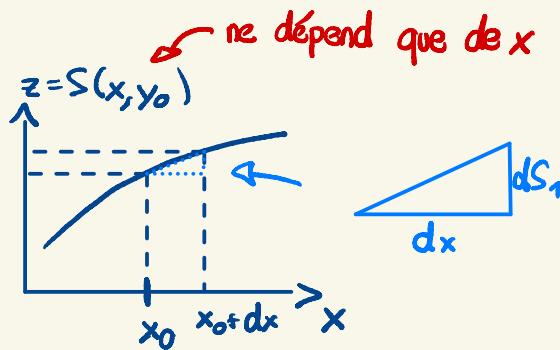
$$z = S(x, y)$$

$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} \equiv \left. \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} \right|_y$: pente de la surface dans la direction x , en considérant y constant.

$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} \equiv \left. \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} \right|_x$: pente de la surface dans la direction y , en considérant x constant.



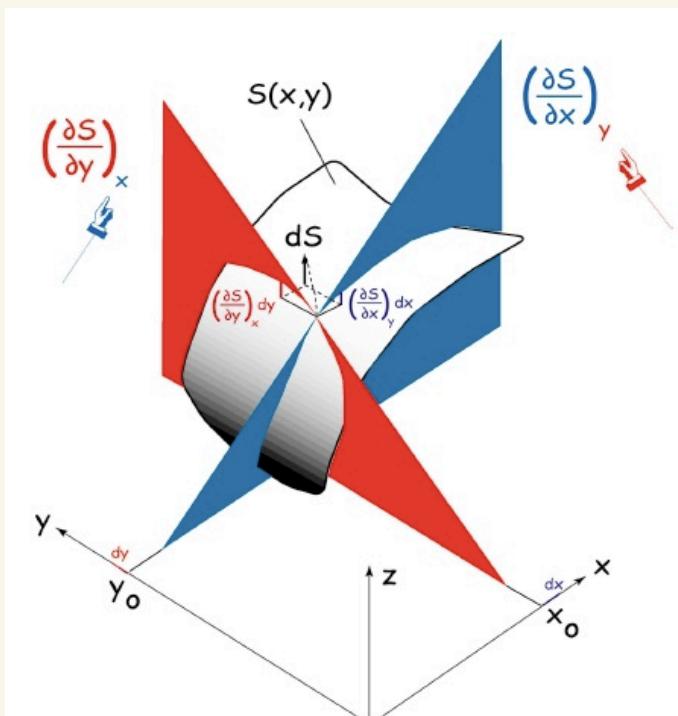
- Dans le plan bleu :
Appelons cette nouvelle fonction $g(x)$



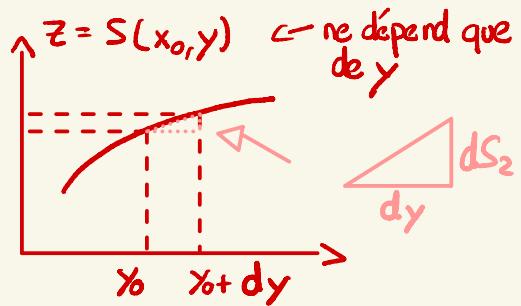
Pour trouver le petit accroissement dS_1 , on utilise la dérivée de $g(x)$: $\frac{dg}{dx} \Rightarrow dS_1 = \frac{dg}{dx} \cdot dx$

On revient à la notation $S(x, y_0)$

$$\Rightarrow dS_1 = \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{y_0} \cdot dx$$



- Dans le plan rouge :
Appelons cette nouvelle fonction $h(y)$

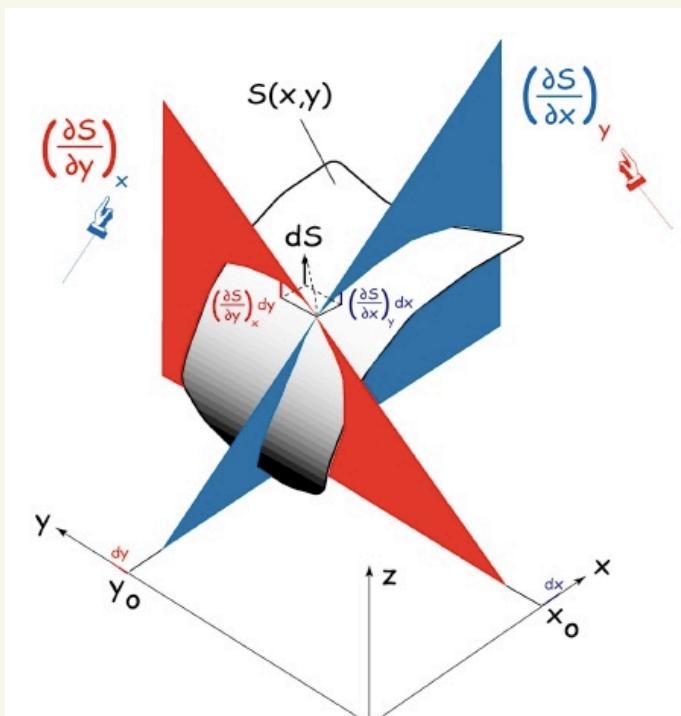


Pour trouver le petit accroissement dS_2 , on utilise la dérivée de h : $\frac{dh}{dy} \Rightarrow dS_2 = \frac{dh}{dy} \cdot dy$

On revient à la notation $S(x, y)$

\Rightarrow

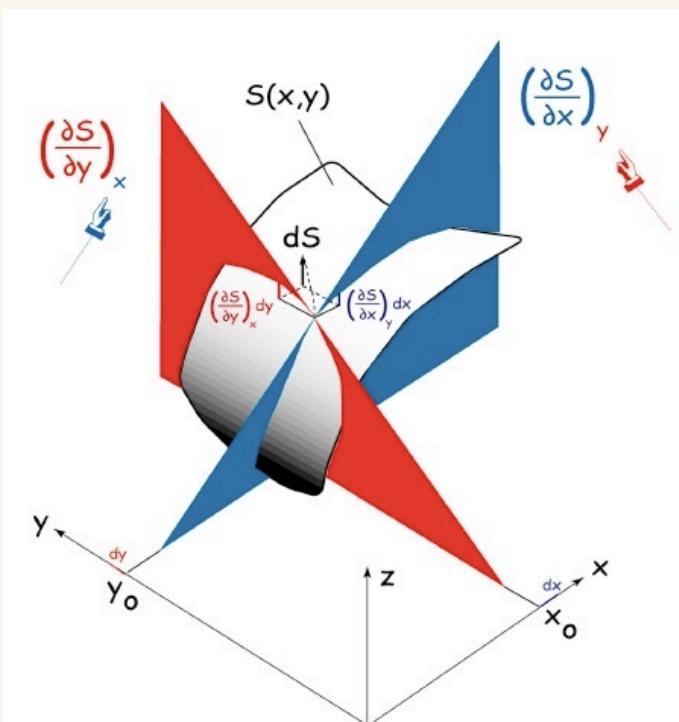
$$dS_2 = \left. \frac{\partial S}{\partial y} \right|_{x_0} \cdot dy$$



Dans un plan quelconque, la variation dS donnée par une petite variation dx et dy est :

$$dS = dS_1 + dS_2$$

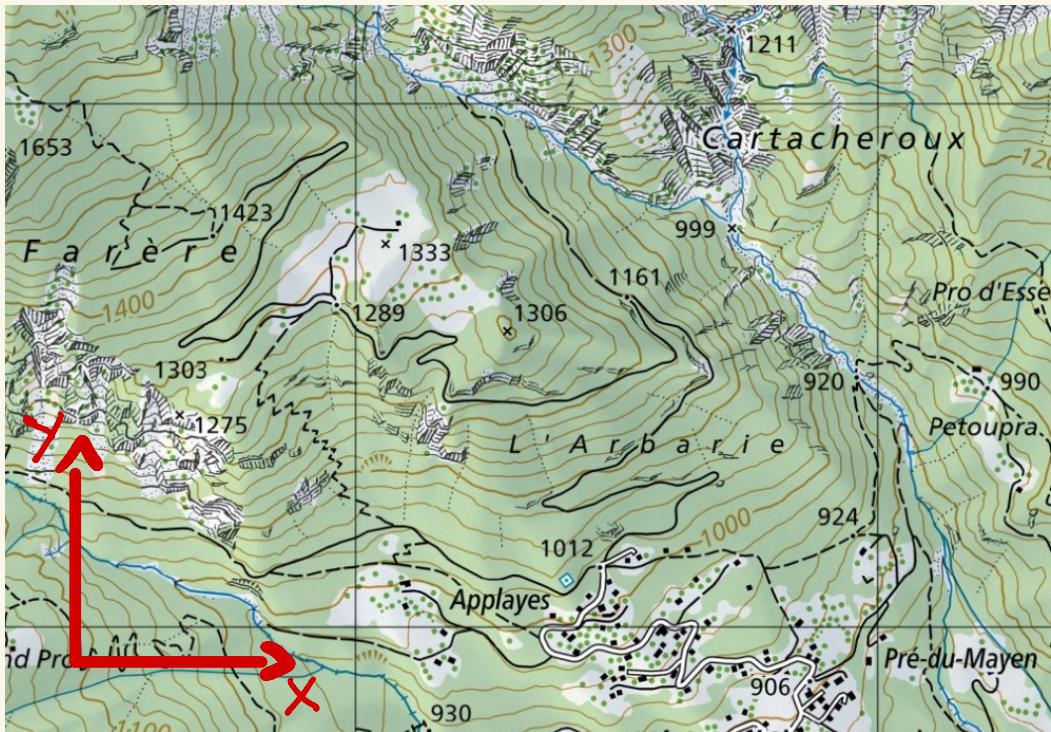
$$dS = \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{y_0} dx + \left. \frac{\partial S}{\partial y} \right|_{x_0} dy$$



• Exemple : $S(x, y) = \text{altitude}$

$\left. \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} \right|_y = \text{variation d'altitude si on se déplace à l'est.}$

$\left. \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} \right|_x = \text{variation d'altitude si on se déplace au nord.}$



On verra tout au long du cours la définition de grandeurs physiques utilisant des dérivées partielles.

Exemple: Coefficient de dilatation thermique isobare :

$$\alpha_V = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P$$

Le coefficient est une mesure de la variation de volume due à une variation de température, à pression constante (isobare).



1.8.2. Différentielle de fonction à plusieurs variables

- Rappel sur la forme différentielle d'une fonction à une variable :

En connaissant $f'(x)$ ou df , on peut calculer l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x) dx \equiv \int_{x_0}^{x_1} df = f(x_1) - f(x_0)$$

On peut reconstruire $f(x_1)$ (à une constante près)

$$f(x_1) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} df$$

- Est-ce possible de faire pareil pour une fonction à plusieurs variables ?

$$f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} df(x, y)$$

Réponse : Oui, pour autant que l'intégrale ne dépende pas du chemin utilisé pour aller de (x_0, y_0) à (x_1, y_1) .

En d'autre terme, df doit être une différentielle totale exacte.

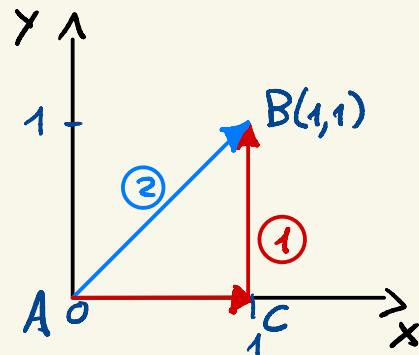
Notations:

- Si l'intégrale dépend du chemin, on note la différentielle δ , exemple δf ($\text{delta} f$)
- Si l'intégrale ne dépend pas du chemin, on note la différentielle totale exacte d , exemple df (d "droit" f)

Exemples :

1) $\int_A^B Sf = y dx$ ou $\int_A^B df = y dx$?

Calculons $\int_A^B Sf$ selon les deux chemins ① et ②



$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \int_A^B Sf &= \int_A^C Sf + \int_C^B Sf = \int_{(0,0)}^{(1,0)} y dx + \int_{(1,0)}^{(1,1)} y dx \\
 &= \underbrace{\int_{(0,0)}^{(0,0)} 0 dx}_{0} + \underbrace{\int_{(1,0)}^{(1,1)} y dx}_{0} = 0
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \int_A^B Sf = \int_{(0,0)}^{(1,1)} y dx = \int_{(0,0)}^{(1,1)} x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

car $y = x$ sur ②

L'intégrale dépend du chemin utilisé $\Rightarrow Sf$

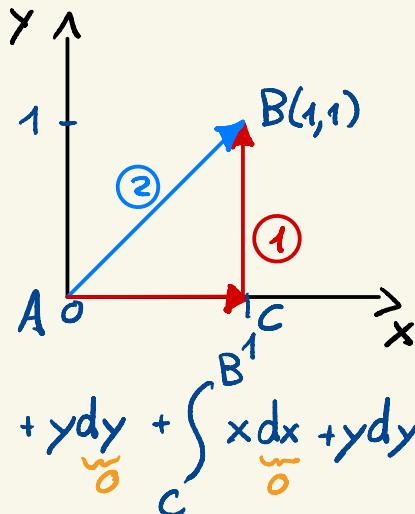
$$\textcircled{2} \quad \oint \mathbf{f} = x \, dx + y \, dy \quad \text{ou} \quad df = x \, dx + y \, dy$$

Calculons $\int_A^B \mathbf{f}$ selon

les deux chemins ① et ②

$$\textcircled{1} \quad \int_A^B \mathbf{f} = \int_A^C \mathbf{f} + \int_C^B \mathbf{f} = \int_A^C x \, dx + y \, dy + \int_C^B x \, dx + y \, dy$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = 1$$



$$\textcircled{2} \quad \int_A^B \mathbf{f} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} x \, dx + y \, dy = \int_0^1 2x \, dx = 2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 1$$

\uparrow
 $y=x$ sur ②
 et donc $dy = dx$

Cette fois-ci l'intégrale ne semble pas dépendre du chemin. Mais il nous faut un critère pour pouvoir évaluer si une équation est différentielle totale exacte.

Lemme de Poincaré ou théorème de Cauchy

Soit la différentielle $Sf = A(x,y)dx + B(x,y)dy$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que df soit une différentielle totale exacte est que :

$$\left. \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} \right|_y = \left. \frac{\partial A(x,y)}{\partial y} \right|_x$$

On écrit alors df au lieu de Sf et on peut trouver $f(x,y)$ tel que $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y = A(x,y)$ et $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x = B(x,y)$

\Rightarrow Pour une fonction $f(x,y)$, la forme différentielle totale d'une fonction, définie comme

$$df = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x dy$$

est une différentielle totale exacte.

Remarque : C'est une conséquence du théorème de Schwarz qui permet d'intervertir l'ordre des dérivées secondes.

Lemme de Poincaré ou Théorème de Cauchy

Généralisation pour n variables :

Pour n variables x_i avec $i=1 \dots n$,

$df = A_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + A_i(x_1, \dots, x_n)dx_i + \dots + A_n(x_1, \dots, x_n)dx_n$.

est une différentielle totale exacte si :

$$\frac{\partial A_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \quad \forall (i, j)$$

Reprendons les deux exemples précédents :

$$1) \quad Sf = ydx \quad Sf = ydx + 0dy$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} A(x,y) &= y \\ B(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} \Big|_y = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_y \neq \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_x$$

$\Rightarrow Sf = ydx$ n'est pas une différentielle totale exacte

$$2) \quad Sf = xdx + ydy \quad \Rightarrow \begin{aligned} A(x,y) &= x \\ B(x,y) &= y \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} \Big|_y = 0 = \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_x$$

$\Rightarrow df = xdx + ydy$ est une différentielle totale exacte.

$$df = x dy + y dx$$

On sait donc qu'on peut trouver $f(x,y)$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_y = A(x,y) = x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_x = B(x,y) = y$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C$$

↑ constante

Exemple concret : Randonnée

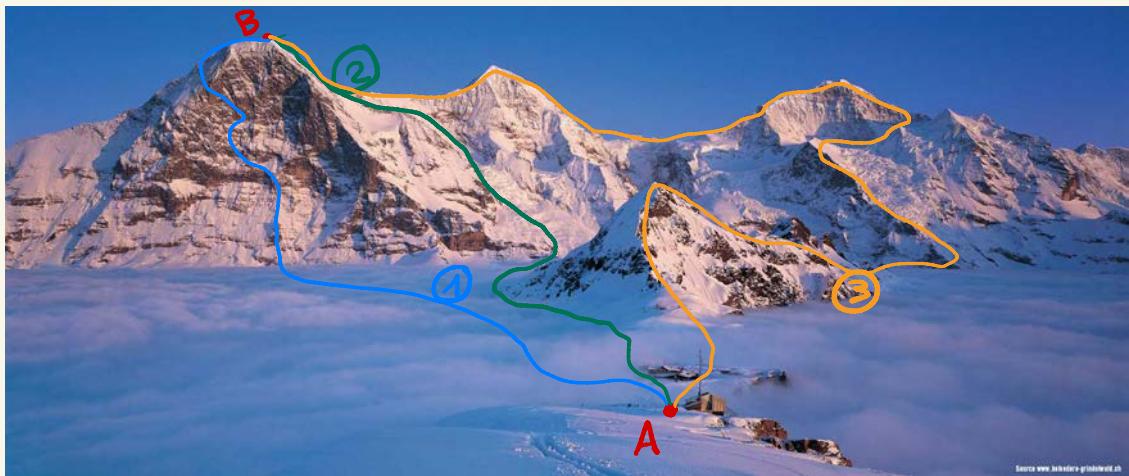
- Lors d'une randonnée, le dénivelé dh est indépendant du chemin emprunté.

$$* \Delta h = \int_A^B dh = h(B) - h(A)$$

$$* \text{Quelque soit le point } C \text{ intermédiaire} \quad \Delta h = \int_A^C dh + \int_C^B dh$$

$$* \text{Si on retourne au départ} \quad \Delta h = 0$$

- Le dénivelé cumulé dépend du chemin emprunté.
 - * Il faut écrire Sh_c
 - * Δh_c dépend du point intermédiaire
 - * Quand on retourne au point de départ $\Delta h_c \neq 0$
- Le temps de trajet et la distance parcourue sont d'autres exemples de fonctions qui dépendent du chemin emprunté.



En thermodynamique, la notion de différentielle totale exacte est essentielle. Certaines grandeurs dépendent du "chemin" utilisé (travail, chaleur), d'autres sont indépendantes (énergie interne).